CLASE 9. Los Números Complejos

En nuestro enfoque inicial, consideraremos los números complejos como pares ordenados de números reales. Un par ordenado de números reales se denota por (a, b).

Definición 9.1 (Números Complejos)**.** El sistema $\mathbb{C}$ de números complejos es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (a, b), con dos operaciones binarias que llamamos suma, denotada por $+$, y multiplicación, denotada por $\cdot$, que cumplen las siguientes reglas:

i) $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

ii) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

iii) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Este sistema de números complejos también satisface las propiedades conocidas de la suma y el producto que tiene, por ejemplo, el *campo* (o *cuerpo*) de los números reales $\mathbb{R}$. Entre los números complejos de la forma $(a, 0)$ y los números reales se puede establecer un *isomorfismo*, lo que nos permitirá identificar dichos números complejos con los números reales. Para ello definimos la función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_0$ como $\varphi(a) = (a, 0)$, donde $\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$. Esta función es biyectiva y preserva las operaciones de la suma y el producto:

i) $\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

ii) $\varphi(ab) = (ab, 0)$ y $\varphi(a)\varphi(b) = (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$, por lo que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

iii) φ es inyectiva: $\varphi(a) = \varphi(b)$ indica que $(a, 0) = (b, 0)$, luego $a = b$.

iv) φ es sobreyectiva: para $(a, 0) \in \mathbb{C}_0$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) = (a, 0)$.

Así, podemos *identificar* el número real a con el número complejo $(a, 0)$. Escribiremos, de hecho, $(a, 0) \equiv a$ y, en particular, $(0, 0) \equiv 0$.

Denotando el número complejo $(0, 1)$ como i, es decir, $i \equiv (0, 1)$, vemos que éste número cumple $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

También, para cualquier número complejo (a, b), podemos escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + ib,$$

obteniendo así la llamada Forma Binomial del número complejo (a, b). Dado un número complejo (a, b), se dice que a es la parte real y que b es la componente (o parte) imaginaria (del número complejo). Los números complejos de la forma $(0, b) = 0 + ib = ib$ se dicen imaginarios puros. El número complejo $a + ib$ se dirá *imaginario* si $b \neq 0$.

El siguiente teorema nos permitirá definir la *división* de números complejos (no nulos).

Teorema 9.2. *Dados dos números complejos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$, con $w \neq 0$, existe un único número complejo $\alpha = (x, y)$ tal que $w \cdot \alpha = z$.*

Prueba. La demostración es sencilla. Basta resolver $w \cdot \alpha = (c, d) \cdot (x, y) = (a, b)$, con $c^2 + d^2 \neq 0$ (pues $w \neq 0$), es decir, $(cx - dy, cy + dx) = (a, b)$. Luego, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ cy + dx = b, \end{cases}$$

obteniendo $x = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}$ y $y = \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$. □

Definición 9.3 (División o cociente)**.** Dados dos números complejos z y w, con $w \neq 0$, su cociente, denotado por $\dfrac{z}{w}$, se define como el (único) número complejo α que cumple $w \cdot \alpha = z$. Si $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ entonces $\dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$.

Definición 9.4 (Complejo conjugado)**.** El (número complejo) conjugado $\bar{z}$ de un número complejo $z = a + ib$ es dado por $\bar{z} = a - ib = (a, -b)$.

Las siguientes propiedades son inmediatas (z y w son números complejos arbitrarios):

a) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$.

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

c) $\overline{\left(\dfrac{z}{w} \right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

d) $\overline{(\bar{z})} = z$.

e) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$.

f) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

Definición 9.5 (Módulo o Valor Absoluto)**.** El valor absoluto (o módulo) de un número complejo $z = a + ib$, denotado $|z|$, se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Algunas propiedades del módulo serían (siendo z y w números complejos arbitrarios):

i) $|z| = |\bar{z}|$.

ii) $z\,\bar{z} = |z|^2$.

iii) $|\operatorname{Re}(z)| \le |z|$.

iv) $|\operatorname{Im}(z)| \le |z|$.

v) $|z\,w| = |z|\,|w|$.

vi) $|z + w| \le |z| + |w| \quad$ y $\quad \Big||z| - |w|\Big| \le |z - w|$.

Las demostraciones son sencillas, por ejemplo para (vi) :

Prueba.

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &\overset{\text{(ii)}}{\underset{\downarrow}{=}} (z-w)\overline{(z-w)} \overset{\text{(a)}}{\underset{\downarrow}{=}} (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \\ &= z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \overset{\text{(ii),(b),(d)}}{\underset{\downarrow}{=}} |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \\ &\overset{\text{(e)}}{\underset{\downarrow}{=}} |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \overset{\text{(iii)}}{\underset{\downarrow}{\ge}} |z|^2 - 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &\overset{\text{(v)}}{\underset{\downarrow}{=}} |z|^2 - 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \overset{\text{(i)}}{\underset{\downarrow}{=}} (|z| - |w|)^2, \end{aligned}$$

así $|z - w| \ge \Big||z| - |w|\Big|$. □

Usando el sistema de coordenadas cartesianas, los números complejos se interpretan como puntos en el plano. Asociamos el número complejo $z = (x, y)$ con el punto $P(x, y)$. Denotando la longitud del vector $\mathbf{OP}$, vector que une el origen y el punto P, con la letra r y siendo θ el ángulo entre el eje positivo real x y el vector $\mathbf{OP}$, con la convención usual de rotación (θ es positiva para rotaciones contrarias al movimiento de las agujas del reloj, negativa en el otro sentido), diremos que θ es un argumento del número complejo z y se denota $\theta = \arg(z)$ (ver Figura 1).

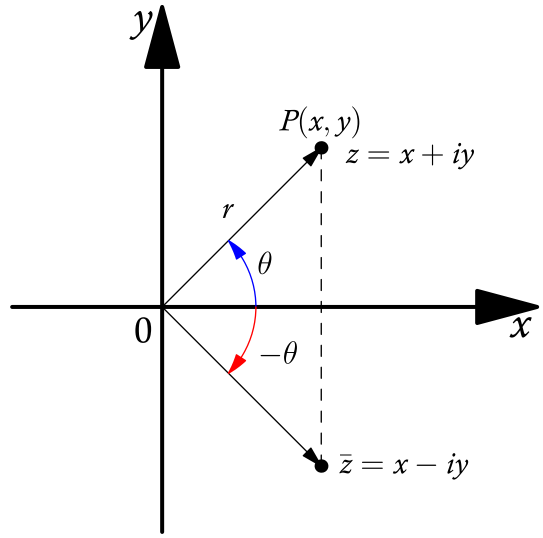

Figura 1: Los números complejos y las coordenadas polares.

Usando coordenadas polares (r, θ), se tienen las ecuaciones $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ y, por tanto,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arg(z).$$

Si restringimos θ al intervalo[1] $(-\pi, \pi]$ se tiene el valor principal del argumento y, en éste caso, en lugar de escribir $\arg(z)$ usamos $\mathrm{Arg}(z)$. Nótese que la función $\mathrm{Arg}(z)$ no está definida para $z = 0 = (0, 0)$ (ni tiene sentido, en dicho punto, lo hecho para definir $\arg(z)$).

Además, de las ecuaciones $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ (de donde, por cierto, se obtiene que $\tan\theta = \tan(\mathrm{Arg}\, z) = \tan(\arg z) = \frac{y}{x}$, ecuación que nos permite determinar a θ a partir de x y de y. Ver Figura 2), es

$$z = x + iy = r\cos(\theta) + ir\,\mathrm{sen}(\theta) = r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)),$$

que es la Representación Trigonométrica del número complejo z, con $z \neq 0$.

La famosa fórmula de Euler,

$$e^{i\cdot\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta),$$

[1] Una razón para querer restringir a θ es que, de no hacerlo, todo número complejo tendría una cantidad infinita de argumentos, lo que significaría que cualquier número complejo, escrito en forma única en forma cartesiana o en forma binómica, se podría escribir en una cantidad infinita de maneras distintas en polares. Para lograr describir, en coordenadas polares, a todos los números complejos (en forma única), es necesario restringir a θ a algún intervalo semi-abierto de longitud 2π.

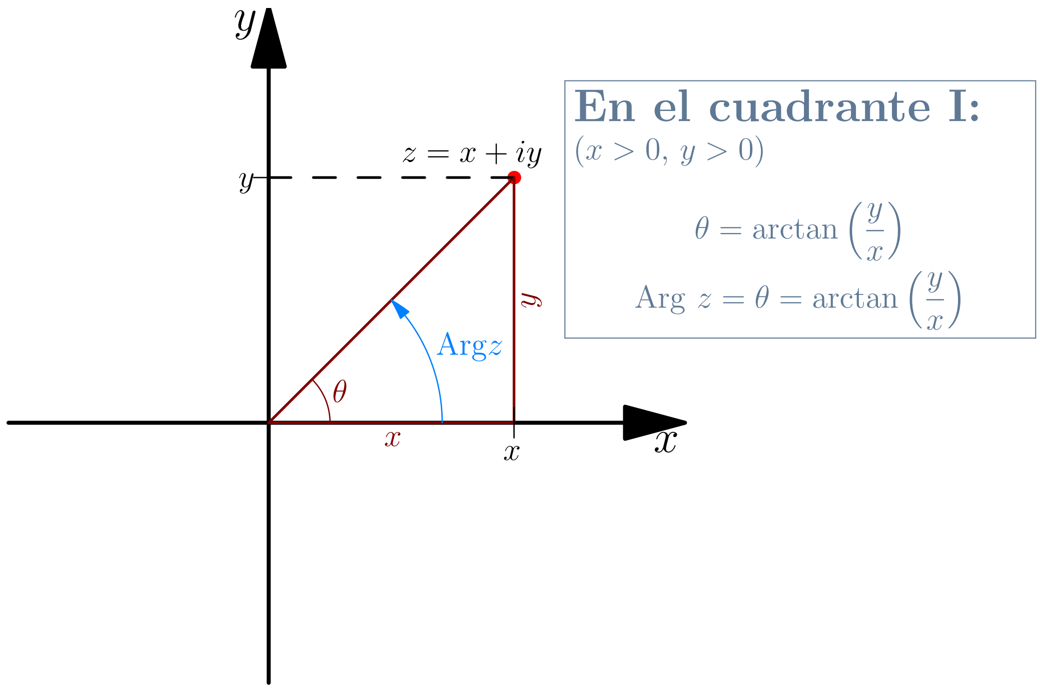

Figura 2: Cálculo de $\mathrm{Arg}\, z$.

la cual puede ser demostrada más adelante usando series, nos permite escribir la forma trigonométrica de la siguiente forma (más compacta)

$$z = r e^{i\theta},$$

que es la representación en Forma Polar del número complejo z. Geométricamente, $e^{i\theta}$ representa (para cada $\theta \in \mathbb{R}$) un vector unitario (es decir, $|e^{i\theta}| = 1$) que subtiende un ángulo θ con el semieje positivo x.

Esta forma polar nos permitirá calcular productos, potencias y raíces de números complejos con cierta facilidad. Sean $z_1 = re^{i\theta}$ y $z_2 = \rho e^{i\alpha}$, entonces

a) $z_1 z_2 = r\rho\, e^{i(\theta+\alpha)}$.

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r}{\rho} e^{i(\theta-\alpha)}$.

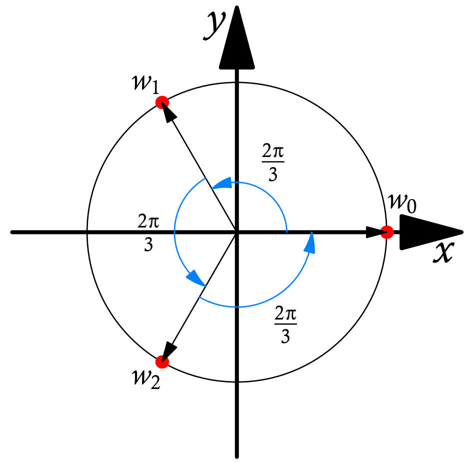

Figura 3: Interpretación geométrica del número $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

c) La potencia enésima del número complejo $z = re^{i\theta}$, con n natural, será $z^n = r^n e^{in\theta}$, de donde se obtiene la llamada fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta).$$

Definición 9.6 (Raíz enésima)**.** Para cada número natural n, se dice que un número complejo w es la raíz enésima del número complejo z si $w^n = z$. Escribimos $w = \sqrt[n]{z}$ ó $w = z^{1/n}$.

Para calcular la raíz enésima, escribimos a z y a w en forma polar:

$$z = r\,e^{i\theta}, \quad w = \rho\,e^{i\alpha}. \tag{1}$$

Luego, por la Definición 9.6 se cumple

$$\rho^n e^{in\alpha} = r\,e^{i\theta}, \tag{2}$$

de donde se obtiene que $|\rho^n e^{in\alpha}| = \left|r\,e^{i\theta}\right|$ y, en consecuencia, gracias a la Propiedad (v) y a que $\left|e^{i\theta}\right| = 1 \quad \forall\,\theta \in \mathbb{R}$, se cumple que $\rho^n = r$, es decir,

$$\rho = \sqrt[n]{r} \tag{3}$$

(la enésima raíz real positiva del numero no-negativo r). Sustituyendo (3) en (2) y simplificando nos queda que $e^{in\alpha} = e^{i\theta}$, es decir, $\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$. Se obtiene entonces, gracias a la Propiedad (i), que $\cos(n\alpha) = \cos\theta$ y que $\mathrm{sen}(n\alpha) = \mathrm{sen}\,\theta$, es decir, $n\alpha = \theta + 2k\pi$, con k entero. Así, para cada valor entero de k, obtenemos un valor de α (un argumento), que denotaremos α_k y que viene dado por la fórmula

$$\alpha_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{4}$$

lo que arroja una cantidad infinita de posibles valores de α (uno por cada valor de k).

Aunque se obtienen infinitos posibles valores de α (los infinitos α_k, con k entero), al sustituir $\alpha_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ (con $k \in \mathbb{Z}$) en la expresión polar (Ecuación (1)) de w (número complejo que denotaremos w_k), sólo se consiguen n raíces enésimas diferentes: las correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (es decir, $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$). En efecto,

$$w_{n+j} = \rho\, e^{i\,\alpha_{n+j}} = \rho\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+n\frac{2\pi}{n}+j\frac{2\pi}{n}\right)} = \rho\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi+j\frac{2\pi}{n}\right)} \overset{\boxed{e^{2\pi\,i}=1}}{\overset{\downarrow}{=}} \rho\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+j\frac{2\pi}{n}\right)} = w_j \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots$$

y similarmente para $w_{-1}, w_{-2}, \ldots$

Ejemplo 9.7. Calcule las raíces cúbicas de la unidad. En otras palabras, calcule $\sqrt[3]{1}$.

Solución. La forma polar de $z = 1$ es

$$z = 1 \cdot e^{i\,\theta}, \quad \text{siendo } \theta = 0 \text{ y } r = 1.$$

De (3) es $\rho = \sqrt[3]{1} = 1$. De (4) es $\alpha_k = k(\frac{2\pi}{3}) \quad (k \in \mathbb{Z})$.
$k = 0$ nos arroja $\alpha_0 = 0$ y así una de las raíces es

$$w_0 = 1.$$

Para $k = 1$ es $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$ y para $k = 2$ es $\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}$. Luego, las otras raíces vienen dadas por

$$w_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \;\text{ y }\; w_2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Geométricamente, las raíces se pueden apreciar en la Figura 4. Nótese que w_0, w_1 y w_2 cumplen la ecuación $(w_k)^3 = e^{2\,k\,\pi\,i} = 1$ (siendo $k = 0, 1, 2$), por lo que las raíces correspondientes w_0, w_1 y w_2 cumplen la ecuación $w^3 - 1 = 0$, es decir, $(w-1)(1+w+w^2) = 0$. El número $w_0 = 1$ es la raíz (o cero) del primer polinomio $(w-1)$ mientras que las otras dos raíces cúbicas (w_1 y w_2) son raíces del polinomio $1 + w + w^2$. Además se tiene que $w_0 = 1 = (w_1)^0$, $w_1 = w_1$ y $w_2 = (w_1)^2$ (y también, $(w_1)^3 = w_0$, $(w_1)^4 = w_1$, $(w_1)^5 = w_2$ y así sucesivamente), lo que muestra que todas las raíces cúbicas son potencias de w_1.[2]

[2] En términos matemáticos: las raíces de la unidad forman un grupo cíclico.

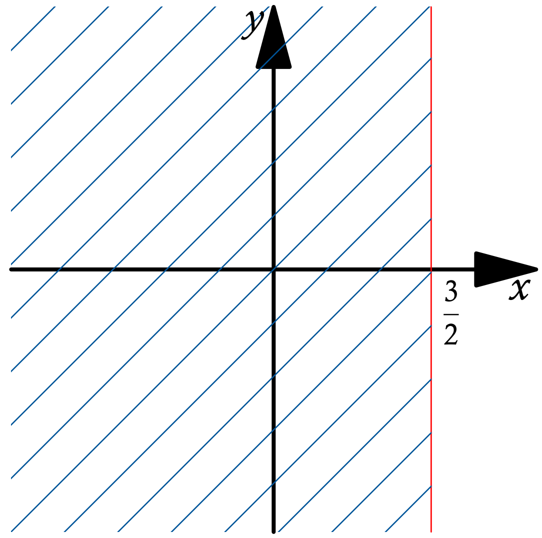

Figura 4: Las raíces cúbicas de la unidad.

Ejemplo 9.8. Identifique la región definida por la desigualdad $|z-1| \leq |z-2|$.

Solución. Hacemos $z = x + iy$. Así $z - 1 = (x-1) + iy$ y $z - 2 = (x-2) + iy$. Más aún,

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

y

$$|z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

Luego, la región viene dada por $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, de donde obtenemos $x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq x^2 - 4x + 4 + y^2$, es decir, $2x \leq 3$ y $x \leq 3/2$. El conjunto está formado entonces por todos los puntos del plano que se encuentran a la izquierda de la recta vertical $x = 3/2$.

Figura 5: La región determinada por $|z-1| \leq |z-2|$.

Ejemplo 9.9. Sean z, w números complejos (diferentes), con $|z| = 1$. Pruebe que $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| = 1$.

Solución. Usando que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (Propiedad (ii)) se tiene que $z \cdot \bar{z} = 1$. Con este "truco", sustituyendo es

$$\left|\frac{z-w}{z\bar{z}-\bar{w}z}\right| = \left|\frac{z-w}{z(\bar{z}-\bar{w})}\right| = \frac{|z-w|}{|z||\overline{z-w}|} = \frac{1}{|z|} = 1,$$

donde hemos usado, en la penúltima igualdad, que $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$ (Propiedad (a)), que $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ y, en particular, para $\alpha = z - w$ (Propiedad (i)) y que $z - w \neq 0$.

Ejemplo 9.10. Pruebe que las tres raíces de la ecuación $(z-1)^3 + z^3 = 0$ están sobre la recta de ecuación $x = \frac{1}{2}$.

Solución. Denotemos por z_0, z_1, z_2 dichas raíces. Las raíces de la ecuación, además de ser no-nulas, cumplen la ecuación $(z-1)^3 = -z^3$ y, en consecuencia, $\left[-\frac{z-1}{z}\right]^3 = 1$.

Usando las raíces cúbicas de la unidad, con $\rho = 1$ y $\alpha_k = \frac{2k\pi}{3}$ $(k = 0, 1, 2)$ se tiene que

$$-\frac{z-1}{z} = e^{i\lambda k}, \quad \text{siendo } \lambda = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{y } k = 0, 1, 2).$$

Luego, $-(z_k - 1) = z_k e^{i\lambda k}$. Equivalentemente, $-z_k + 1 = z_k e^{i\lambda k}$ o también $z_k(1 + e^{i\lambda k}) = 1$. De aquí resulta

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{1+e^{i\lambda k}} = \frac{1}{1+\cos(\lambda k) + i\,\mathrm{sen}(\lambda k)} = \frac{(1+\cos(\lambda k)) - i\,\mathrm{sen}(\lambda k)}{(1+\cos(\lambda k))^2 + \mathrm{sen}^2(\lambda k)} \\ &= \frac{(1+\cos(\lambda k)) - i\,\mathrm{sen}(\lambda k)}{2(1+\cos(\lambda k))} = \frac{1}{2} - i\frac{\mathrm{sen}(\lambda k)}{2(1+\cos(\lambda k))}. \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Re}(z_k) = \frac{1}{2}$, (para $k = 0, 1, 2$) y todas las raíces están sobre la recta $x = \frac{1}{2}$.